Révisions d'Algèbre

I- Préambule

Intention

Ces pages prétendent reprendre, en les approfondissant, certaines notions d'algèbre étudiées au collège, avec l'intention de prévenir autant que faire se peut les erreurs les plus courantes rencontrées dans les copies, en seconde. Ces erreurs effectivement commises révèlent qu'il y a beaucoup de choses à dire. Elles sont dites ici et puisqu'il y en a beaucoup, le texte manque de **concision**, d'autant que des informations importantes sont souvent intentionnellement répétées.

Mode d'emploi

Imprimez, agrafez, lisez une première fois, apportez classe pendant tout le premier trimestre.

Conventions

La flèche « ⇝ » sert à décrire une erreur d'algèbre.

La police de caractère « **Blue Highway** » est utilisée pour faire ressortir les mots de langue française un peu rares. Ils sont expliqués dans le **glossaire** du dernier paragraphe.

La **police manuscrite** sert à marquer les mots mathématiques au moment où ils sont introduits. Le plus souvent, lors de cette première **occurrence**, ils sont définis ou du moins expliqués.

Référence

Lorsqu'un choix de vocabulaire devait être fait, l'ouvrage qui a été pris pour référence est l'excellent *Dictionnaire des Mathématiques Elémentaires* de Stella Baruk, publié au Seuil. Il est recommandé à tous ceux qui souhaitent comprendre en profondeur les notions de base des mathématiques.

Les erreurs

Une fois qu'un D.S.T. est rendu, passée l'euphorie ou la **déréliction**, vous devez vous attaquer à une analyse scrupuleuse des erreurs. Lorsqu'une zone du texte est entourée, dans votre copie, c'est pour signifier que s'y cache une erreur. Il faut absolument comprendre *en quoi* elle est une erreur. Le corrigé ne dira pas grand-chose à ce sujet : il ne présente qu'une méthode de résolution parmi d'autres. On n'explique pas une erreur en lui substituant une « non-erreur ». Il faudra parfois poser des questions au professeur.
Une erreur qui n'a pas été correctement analysée par son auteur se renouvellera alors, de D.S.T. en D.S.T., coûtant autant de point qu'il le faudra, jusqu'à ce qu'elle reçoive une explication ***ad hoc***.

Correction

À propos d'erreur, certains passages ont été tapés un peu vite et mériteraient de nouvelles relectures. Merci de m'aider en signalant toute erreur, même infime, que vous rencontreriez.

II- Forme

Définition

Donner la forme d'une expression, c'est dire s'il s'agit d'une somme, d'une différence, d'un produit, d'un quotient…

Vocabulaire

Expression	Forme	Nom des termes
$a+b$	somme	« parts »
$a+b+c$	« poly-somme »	
$a-b$	différence	
ab	produit	facteurs
abc	« poly-produit »	
$a-b+c$	somme algébrique	« échelons »
$\frac{a}{b}$	quotient	dividende, diviseur (numérateur, dénominateur)

Remarques

Les nombres relatifs nous inciterons à oublier peu à peu la soustraction et à voir toute différence comme une petite somme algébrique.
De façon un peu audacieuse, nous proposons des mots là où ils manquent. Ces mots serons toujours écrits entre guillemets.

Lecture

Lorsqu'on lit une expression, il importe de faire entendre sa forme par le ton qu'on y met.
Ainsi, $2 + 2 \times 5$ doit être lu « deux plus… deux fois cinq ».

Erreur par déformation

Voici une erreur rencontrée dans plusieurs copies lors d'un contrôle : $(9x^2) - 4(x^2 - 2x + 1) \rightsquigarrow (9x^2)(-4x^2 + 8x - 4)$
En distribuant le -4, ceux qui ont commis cette erreur ont malencontreusement « déformé » la somme algébrique qu'était l'expression en un produit : ils ont fait apparaître une multiplication là où il y avait une addition. Une part de ces élèves avaient en tête qu'il s'agissait bien d'une addition et trouvaient quand même le bon résultat, mais les autres ont repris ce qu'ils avaient marqué et ont distribué le $9x^2$.

III- Commutativité, associativité

Commutativité

L'addition et la multiplication sont des opérations **commutatives** (ce qui n'est pas le cas de la soustraction ni de la division). Cela signifie qu'on peut permuter les termes d'une somme ou d'un produit sans changer sa valeur :
Quels que soient les nombres a et b :

$a + b = b + a$
$ab = ba$

Associativité

L'addition et la multiplication sont des opérations **associatives** (ce qui n'est pas le cas de la soustraction ni de la division). Cela signifie qu'on peut grouper comme on veut les termes dans une somme (ou un produit) de trois termes :
Quels que soient les nombres a, b et c :

$(a + b) + c = a + (b + c)$
$(ab)c = a(bc)$

« Poly-sommes », « polyproduits »

L'associativité autorise à écrire sans parenthèses des « poly-sommes » ou des « poly-produits ».
Par exemple, pour calculer le « poly-produit », $2\times3\times4$, il faut choisir de placer les parenthèses d'une façon ou d'une autre. L'ambiguïté qui provenait de l'absence de parenthèses n'était pas gênante, puisque le résultat est le même dans les deux cas :

	$(2\times3)\times4$		$2\times(3\times4)$
$=$	6×4	$=$	2×12
$=$	**24**	$=$	**24**

Déplacement d'un terme

A l'intérieur d'une poly-somme ou d'un poly-produit, la commutativité et l'associativité permettent de déplacer un terme. Mais si l'on sort de terme de son contexte, on prend le risque de changer la valeur de l'expression :
$5 + (2 + \mathbf{5})\times10 \rightsquigarrow 5 + \mathbf{5} + 2\times10$
Nous parlerons alors d'erreur par *téléportation*.

IV- Les sommes algébriques

Les signes moins

Il y a trois signes moins, qui, par ordre chronologique de leur apparition à l'école, sont :

Le moins-soustraction : « $10 - 5$ »
Le moins-négatif : « -5 »
Le moins-opposé : « $-A$ », « $-(2 + 2)$ »

Or tous peuvent être vus comme des moins-opposés. En effet, « -5 » est l'opposé de 5 et « $10 - 5$ » peut (et doit) être vu comme 10 et… l'opposé de 5.
Il y a symétriquement trois signes « + », qui peuvent tous être ramenés au dernier cas :

Le plus-addition : « 2+2 »
Le plus-positif : « +2 »
Le plus-neutre (qui ne fait rien) : « $+a$ »

Somme algébrique

Une **somme algébrique** est une succession de termes séparés par des « + » et de « − ». Exemple : « $a - b + c$ ».
Nous appellerons ces signes « + » et « − » des « signes algébriques ».
Il ne faut pas voir les « signes algébriques » comme des signes opératoires, mais comme des signes « *prédicatoires* », c'est-à-dire non pas placés entre des termes, mais devant un terme :
« $a - b + c$ » doit se lire : « $a\ldots\ -b\ \ldots\ +c$ », où les silences, les espaces, marquent une addition **implicite** alors que les signes + et − sont les plus-neutre et moins-opposé.
$a - b + c$ signifie en fait : $(+a) + (-b) + (+c)$.
Nous appellerons les termes de la somme algébrique, considérés avec leur signe algébrique, bien entendu ! des « **échelons** ».

Soustraction

Même une différence ne doit pas être vue comme une différence, mais comme une somme algébrique :

$a - b$ signifie : $a + (-b)$

$9 - 10$ doit être interprété ainsi : $+9 \quad \ldots \quad -10$

(Les points de suspension marquent là encore une addition implicite.)
De sorte qu'on pourrait dire qu'avec les nombres relatifs, la soustraction disparaît.

« Pseudo-associativité »

$-2a$ peut indifféremment être vu comme $(-2)a$ ou comme $-(2a)$. Ces deux expressions ont toujours la même valeur.
On peut même dire que la règle des signes de la multiplication des nombres relatifs est faite pour que cette « pseudo-associativité » fonctionne.

Déplacement d'un terme

Une somme algébrique n'étant en fait qu'une « poly-somme » écrite d'une façon un peu particulière, on peut déplacer un « *échelon* » à l'intérieur de sa somme algébrique, mais attention, avec son signe !

V- Réduction

Monômes

Un **monôme** est constitué de deux parties : le **coefficient**, qui dit « combien il y en a » et l'**unité**, qui nomme ce que l'on compte.

coefficient	unité	type d'unité
5	uns	unité numérique
3	x	unité littérale
-5	ab	unité littérale
$\frac{9}{10}$	x^5	unité littérale
5	$\sqrt{2}$	unité irrationnelle
7	quarts	unité 'fractionnaire'
9	cm	unité de longueur

Ce paragraphe et le suivant, ne concernent que les cas où l'unité est littérale.

Somme

Pour réduire (c'est-à-dire calculer) une somme de monômes, il faut qu'ils aient la même unité. Une somme de monômes qui n'ont pas la même unité est **irréductible**.

Exemples

$3x + 2x = 5x$ Sur le modèle de 3 patates + 2 patates = 5 patates

$-5x^2 + 3x^2 = -2x^2$ Les coefficients sont des nombres relatifs, mais le principe est le même

$2x^2 + 5x$ est irréductible

$x^2 + x$ est irréductible. C'est $1x^2 + 1x^1$.

$3x + 5 = 3x + 5$**uns** C'est irréductible.

L' « un-plicite »

Souvent, le nombre 1 est présent sans être dit. Par exemple, on dit « trois cents », « deux cents », mais pas « **un** cent ».
Ou encore dans « deux tiers », on ne précise pas qu'on veut dire « deux tiers de **un** ».

Le nombre 1 peut être implicite en tant que coefficient, exposant, diviseur, ou même en tant qu'unité.

$$a = \frac{1a^1}{1}$$

Certaines erreurs peuvent être évitées simplement en explicitant le nombre 1. Voici trois exemples :

Erreur :	Façon de l'éviter :
$a^2 + a^3 \rightsquigarrow a^5$	$a^2 + a^3 = \mathbf{1}a^2 + \mathbf{1}a^3$ (irréductible)
$a^5 \times a \rightsquigarrow a^5$	$a^5 \times a = a^5 \times a^{\mathbf{1}} = a^6$
$a \times \frac{b}{c} \rightsquigarrow \frac{ab}{ac}$	$a \times \frac{b}{c} = \frac{a}{\mathbf{1}} \times \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$
$3x + 1 \rightsquigarrow 4x$	$3x + 1$**uns** est irréductible

Produit — On peut toujours calculer un produit de monômes. On multiplie les coefficients entre eux et les unités entre elles.

Exemple — $(-3x^2)(-2x) = +6x^3$

Explication — Il faut voir le produit de deux monômes comme un « poly-produit »

$$(-3x^2)(-2x) = (-3) \times x^2 \times (-2) \times x = (-3) \times (-2) \times x^2 \times x = +6x^3$$

Degré d'un monôme

Dans un monôme dont l'unité est littérale, le nombre de facteurs de l'unité est le **degré** du monôme.

$-3aaabb$ est un monôme de degré 5.

$5a^3$ est un monôme de degré 3.

Lorsqu'il n'y a qu'une variable, le degré correspond à l'exposant portant sur cette variable.

5 pouvant être vu comme $5x^0$, on considère que c'est un monôme de degré zéro.

Polynôme — Une somme de monômes est un **polynôme**.

Degré — Le **degré** du polynôme est le plus grand *degré* de ses monômes.

$4a^2b^3 - 5ab^2 + 3a^2b$ est un polynôme à deux variables, de degré 5.

$5x^3 - \frac{3}{7}x^2 + 5x + 1$ est un polynôme à une variable, de degré 3.

On classe traditionnellement les monômes par degré décroissant.

Réduction — D'après ce que nous avons vu dans le paragraphe précédent, dans un polynôme, on peut compter ensemble les monômes de même unité, mais une somme de monômes qui n'ont pas la même unité est *irréductible*.

Ainsi, une somme comme $x^2 + x^3$ est une somme de deux monômes d'unités littérales différentes : $1xx + 1xxx$. Elle est irréductible.

Cette irréductibilité est garantie par un théorème abordé en première (mais démontré seulement après le bac), qui dit que, sous sa forme habituelle (développée, réduite, ordonnée), un polynôme ne s'écrit que d'une seule façon. Donc, une fois que les monômes de même unité littérale ont été comptés ensemble, on ne peut pas réduire davantage.

Il est important de savoir quelles sont les expressions qui sont irréductibles, c'est-à-dire celles pour lesquelles il n'y a plus de calcul à faire, car si l'on croit à tort qu'il faut continuer un calcul, on finit par commettre une erreur à force de tourner en rond.

VI- Les développements

Opérateur — Une *opération* porte sur deux termes. Par exemple, le signe opératoire « × », est comme muni de deux places vides, qui

attendent les deux facteurs : « □×□ ». Si l'on remplit l'une des deux places seulement, par exemple avec un 3, on fabrique une écriture qui donne l'ordre de multiplier par trois : « ×3 ». C'est un **opérateur**.
Il faudrait distinguer l'opérateur « +1 », qui donne l'ordre d'ajouter 1, du nombre relatif « +1 », qui indique une position par rapport zéro.
Par extension, « prendre la racine », « élever au carré », peuvent être vus comme des opérateurs. Un opérateur est comme une *fonction* élémentaire.
(Le mot opérateur a parfois le sens de « signe opératoire », mais nous ne l'emploierons jamais en ce sens.)

Remarque

Nous dirons qu'un opérateur se **distribue** sur les produits pour dire qu'il se distribue sur les produits et les quotients, et qu'un opérateur se distribue sur les sommes pour dire qu'il se distribue sur toutes les sommes algébriques.

Les distributivités

Les facteurs se distribuent sur les sommes, pas sur les produits.

Les exposants se distribuent sur les produits, pas sur les sommes.

Exemples

$a(b-c+d)=ab-ac+ad$ $\qquad$ $(ab)^3=a^3b^3$

En revanche : $(a+b)^3\neq a^3+b^3$

Identité

Les égalités ci-dessus sont toujours vraies, pour toutes les valeurs qu'on peut donner à leurs variables. On dit que ce sont des **identités**.

La « double distribution »

Pour **développer** un produit de deux sommes, on distribue chaque terme de la première somme sur chaque terme de la seconde. Rappelons que « développer » est un mot

qui, dans un texte mathématique signifie *distribuer* les termes (d'une expression) et non pas « détailler les calculs ».

Exemple

$(a+b)(c+d+e)=ac+ad+ae+bc+bd+be$

Démonstration

On utilise à deux reprises la distribution « simple ». Dans un premier temps on considère le second facteur comme un « bloc » :

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d+e) &= a(c+d+e)+b(c+d+e)\\ &= ac+ad+ae+bc+bd+be\end{aligned}$$

Produits de polynômes

Un produit de polynômes est un polynôme : il suffit de **développer** ce produit pour s'en rendre compte :

$$(x^2+3x+2)(5x+2)=5x^3+17x^2+16x+4$$

L'égalité ci-dessus présente le **développement** d'une expression, mais les étapes intermédiaires n'ont pas été écrites, de sortes que le calcul n'a pas été *détaillé*.
Question : que peut-on dire du degré du polynôme produit par rapport aux degrés des polynômes facteurs ?
Toute expression algébrique formée à partir de variables, de chiffres, et des signes +, − et × peut, après développement et réduction, être mise sous la forme d'un polynôme.

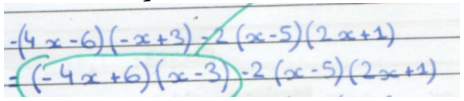
Le moins-opposé

Le signe moins-opposé peut être vu comme un « $(-1)\times$ », il est donc normal qu'il se comporte comme un facteur et se distribue sur les sommes, pas sur les produits.
Exemple :

$$-(a-b+c) = -(+a-b+c) = -a+b-c$$

Opposé de

Voici une erreur de distribution abusive d'un moins sur un produit, rencontrée en quatrième :



Les diviseurs

« ÷ a » (diviser par a) peut être vu comme « $\times\frac{1}{a}$ ». Il est donc normal qu'un diviseur fonctionne comme un facteur (ce qui n'est pas le cas d'un dividende) et se distribue aussi sur les sommes (mais pas sur les produits) : $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$

Lue de droite à gauche, cette *identité* vous semblera sans doute plus familière, puisqu'elle raconte comment calculer une somme de fractions de même dénominateur.

Les racines

Le radical (c'est-à-dire le signe √) fonctionne comme un exposant (il est considéré comme l'exposant $\frac{1}{2}$). Il est donc normal qu'il se distribue sur les produits mais pas sur les sommes.

Distribution naïve

Pour schématiser, on peut dire qu'au moins la moitié des erreurs d'algèbre effectivement rencontrées dans les copies peuvent être vues comme des distributions naïves.

Parfois, l'erreur est faite sans même que celui qui la commet perçoive qu'il a fait une transformation : la distribution n'est même pas perçue comme telle, elle est totalement *transparente* à son auteur. Dans la langue courante en effet, « la cousin de Jules et de Barnabé », est à la fois le cousin de Jules et celui de Barnabé. En mathématiques, le carré de… a plus b, ce n'est pas la même chose que le carré de a plus celui de b.

Lorsqu'on écrit « le carré de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ », le *plus* ne doit pas se lire comme un « *et* ». Le signe opératoire est en effet chargé de souder ensemble deux termes pour former un seul nouveau terme : le résultat. Il faut donc bien penser « $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ » comme un seul nombre. De même que, lorsqu'on écrit « 2+3 », on a déjà écrit le résultat de l'addition.

Espérons que ce qui précède aidera à éviter les erreurs courantes du type : $(a+b)^2 \rightsquigarrow a^2+b^2$

ou encore : $\sqrt{a+b} \rightsquigarrow \sqrt{a}+\sqrt{b}$

Pour développer $(a+b)^2$, il faut revenir à la définition du carré d'un nombre : $(a+b)^2=(a+b)(a+b)$. Ensuite, on peut

distribuer terme à terme. On peut aussi utiliser le raccourci d'une identité remarquable (voir plus loin).

VII- La factorisation

Définition

Factoriser, c'est simplement le contraire de développer.

Le problème, c'est que ce qui est facile dans un sens ne l'est pas forcément dans l'autre. Autant développer peut être fait assez « mécaniquement », autant factoriser demande parfois une grande créativité. Ainsi, les travaux du mathématicien français Évariste Galois ont permis de prouver qu'il n'existait aucune formule générale pour factoriser les polynômes à partir du cinquième degré.

Méthode

Pour factoriser une expression (une somme ou une somme algébrique), il vous suffit de la considérer comme résultant d'un développement et d'essayer retrouver l'expression initiale, qui devait avoir la forme d'un produit.

Exemple d'un cas simple

Factorisons $ab-ac+ad$

Le facteur commun aux trois « échelons » est a. C'est donc lui qui devait être en facteur. On commence donc par écrire :

$a(\quad)$

Puisqu'il faut retrouver, par distribution du a, une somme algébrique de trois termes, il doit y avoir une somme algébrique de trois termes dans les parenthèses :

$a(\quad-\quad+\quad)$

Il reste à remplir les places vides :

$a(\ b\ -c\ +d)$.

À la fin, il faut vérifier qu'en développant, on retrouve la somme donnée au départ.

Autre cas simple

Factorisons $(x-1)(3x+5)+(x-1)(2x+4)$

Ce genre d'expression est déjà à moitié factorisée. Il faut résister à la tentation de la développer, car ce serait revenir en arrière (on ne tenterait cette méthode qu'en dernier recours).
L'expression est de la forme $AB + AC$, qui se factorise facilement par la méthode précédent :

$$AB + AC = A(B + C)$$

Il suffit de considérer que A représente l'expression $(x - 1)$, que B représente $(3x + 5)$ et que C représente $(2x + 4)$. Ainsi, l'égalité précédente devient, par substitution :

$$(x-1)(3x+5) + (x-1)(2x+4)$$
$$= (x-1)[(3x+5) + (2x+4)]$$

Il reste à réduire le facteur entre crochets :

$$= (x-1)(3x + 5 + 2x + 4)$$
$$= \boxed{(x-1)(5x+9)}$$

Autre cas

Ensuite, il faudra faire des exercices et poser des questions dès que vous ne comprenez pas.

Factorisation naïve

Sauriez-vous dire ce qu'on doit mettre à la place du « 2 », qui est erroné ?

$$(4x-6)(-2x+2) \rightsquigarrow 2(2x-3)(-x+1)$$

« Pseudo-factorisations naïves »

On trouve aussi des erreurs du genre : $a^2+b^2 \rightsquigarrow (a+b)^2$

Voici une erreur rencontrée en quatrième : $3^2+4^2 \rightsquigarrow 7^2$

L'élève a su expliquer son erreur rétrospectivement, en disant qu'il avait vu le carré comme une unité (comme cm^2) et qu'il n'était donc même pas « conscient » d'avoir « factorisé » quoi que ce soit.

VIII- Les identités remarquables

Rôle

Les identités remarquables servent surtout à *factoriser*, c'est pourquoi elles sont écrites ici dans le sens de la factorisation (mais on les démontre en développant le membre de droite).

Celles du degré 2 doivent être connues parfaitement : l'invention d'identités remarquables fantaisistes est la source de multiples erreurs en seconde.

Degré 2

sommes		produits
$a^2+2ab+b^2$	=	$(a+b)^2$
$a^2-2ab+b^2$	=	$(a-b)^2$
a^2-b^2	=	$(a-b)(a+b)$

factorisation →

développement ←

Démonstration

Comme susdit, on part du membre de droite, on applique la définition du carré d'un nombre, puis on développe terme à terme. Vous devez être capables de retrouver ainsi les trois identités remarquables au cas où vous ayez des doutes.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$
$$= a^2+ab+ab+b^2$$
$$= \boxed{a^2+2ab+b^2}$$

Même principe pour les deux autres identités.

Lecture

La première identité se lira : « *a* **deux** plus deux *ab* plus *b* **deux** égale a-plus-b **au carré** ». (Voir explications dans le paragraphe sur les puissances.)

Commentaire

a^2-b^2 et $(a-b)^2$ se trouvent toutes deux dans ces identités, mais pas à la même ligne.

Double produit

Cela signifie en fait le double *du* produit. C'est le « $2ab$ », qui est oublié lorsqu'on distribue naïvement le carré sur la somme. Le carré de la somme de deux nombres est égal à la somme de leur carré plus le double produit.

L'identité imaginaire $a^2+b^2=$ ✗✹✗

Cette quatrième identité « n'existe pas », du moins pas en seconde ni en première. Souvent, on trouve dans les copies des erreurs qui correspondent à l'invention d'une quatrième identité remarquable. Cette invention est probablement suscitée par un « désir de symétrie » et par une analogie avec les deux premières identités.
Une somme de deux carrés, en général, ne se factorise pas (mais certaines sommes de carrés particulières peuvent être 'factorisables').
En terminale, on pourra écrire : $a^2+b^2=(a+bi)(a-bi)$,
où « i » représentera un nombre dit *imaginaire*, justement, qui n'est ni positif ni négatif et dont le carré est −1. En attendant, si l'on tient absolument à une quatrième identité remarquable, on peut toujours retenir :

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

Et si cela ne suffit pas :

Degré 3

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$$
$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

Commentaire

En retenant seulement la première et la troisième identité, on retrouve les deux autres en remplaçant b par $-b$.
Question : que se passe-t-il si l'on opère la même substitution avec la troisième identité remarquable de degré 2 ?

IX- L'inverse et l'opposé

Dans la langue courante, « inverse » et « opposé » sont synonymes. Ce n'est pas le cas en mathématiques, où l'*opposé* ressortit à l'addition alors que l'*inverse* concerne la multiplication.

Opposé

Deux nombres sont **opposés** lorsque leur somme est nulle.
L'opposé de +2 est −2.
L'opposé « fait le contraire » du point de vue de l'addition : ajouter l'opposé de deux, c'est soustraire deux.
L'opérateur « opposé-de » se distribue sur les sommes algébriques : $-(a-b+c)=-a+b-c$

Inverse

Deux nombres sont **inverses** l'un de l'autre lorsque leur produit est égal à 1.
L'inverse de 2 est $\frac{1}{2}$.
L'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$. L'inverse de a est l'inverse de $\frac{a}{1}$, donc $\frac{1}{a}$.
L'inverse « fait le contraire » du point de vue de la multiplication :

Diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse.

Ce théorème peut servir à calculer un quotient de fractions :

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}=\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}=\frac{14}{15}$$

Diviser par $\frac{5}{7}$ revient à multiplier par $\frac{7}{5}$

Prendre l'inverse ne change pas le signe : l'inverse de −2 est $-\frac{1}{2}$.
Zéro n'a pas d'inverse.
Question : il y a deux nombres qui sont leur propre inverse. Lesquels ?

Inverse d'une somme

L'inverse de la somme n'est pas la somme des inverses.

Cette distribution naïve de l'opérateur « inverse-de » produit des erreurs du genre : $\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} \rightsquigarrow 1\times(2+3)=5$

La même erreur pourrait aussi être provoquée par une distribution naïve d'un numérateur sur une somme :

$$\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} \rightsquigarrow \frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\frac{1}{3}}=2+3=5.$$

L'erreur effective peut être un mélange des deux : une erreur a parfois plusieurs raisons d'advenir. On pourrait dire qu'alors l'erreur est « surdéterminée ».

Pour calculer l'inverse d'une somme, il faut d'abord calculer cette somme : $\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{5}{6}}=\frac{6}{5}$

X- Les quotients

Trait de fraction

Le trait de fractions sert originellement à noter des fractions, lesquelles ne sont pas à proprement parler des quotients. En effet, $\frac{7}{3}$, lu comme une fraction, « sept tiers », signifie : 7 fois, le tiers de un, c'est-à-dire 1, divisé par 3, puis multiplié par 7. Il se trouve que cette quantité est égale à 7 divisé par 3, et que cette égalité est vraie pour toute fraction :

$$\frac{a}{b}=a\div b.$$

C'est pour cela que le trait de fraction a fini par remplacer le signe de la division. Lorsqu'on écrit « $\frac{0,5}{x+1}$ », ce n'est pas une fraction, c'est un quotient. Un quotient écrit avec un trait de fraction s'appelle une **écriture fractionnaire**.

Numérateur/dénominateur

Pour commencer, le mot « nominateur » n'a plus sa place en mathématiques. (Il fut parfois utilisé pour dire « dénominateur », mais c'est aujourd'hui exclusivement un terme de **droit canon**.)

Dans « 7 ***dix***ièmes », le 7 sert à compter le nombre de parts. C'est le **numérateur**. Le « dix » sert à fabriquer le nom de l'unité 'fractionnaire'. Il donne son nom à l'unité, il sert à la « dénommer » (comme dans « le dénommé monsieur Bidule »). C'est le **dénominateur**.

Dans une écriture fractionnaire, on parlera souvent, par **abus de langage** de numérateur et de dénominateur au lieu de dividende et de diviseur.

Simplifier un quotient

On peut diviser (ou multiplier) par un même nombre le numérateur et le dénominateur d'une écriture fractionnaire sans changer sa valeur.

Exemples $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ $\qquad \frac{a(b+c)}{ad}=\frac{b+c}{d}$

Simplifications sauvages

Mais c'est le numérateur pris dans son entier, considéré globalement, qu'il faut diviser, et non pas une partie seulement (idem pour le dénominateur, bien entendu). Voici une erreur courante : $\frac{ab+c}{ad+e} \rightsquigarrow \frac{b+c}{d+e}$. On pourra constater qu'en effet cette simplification est erronée sur le **contre-exemple** suivant : $\frac{2\times4+14}{2\times5+1} \rightsquigarrow \frac{4+14}{5+1}$. Avant la simplification abusive, cette expression numérique vaut 2, alors qu'après, elle vaut 3.

Cette erreur consistant à prendre la partie pour le tout survient aussi dans d'autre contextes. On pourrait l'appeler erreur par **synecdoque**.

On voit parfois des simplifications plus fantaisistes encore :

$$\frac{a^2}{b^2} \rightsquigarrow \frac{a}{b} \qquad \frac{a+d}{b+d} \rightsquigarrow \frac{a}{b}$$

Distributions naïves

Un facteur ne se distribue pas sur un quotient.

Exemple d'erreurs : $2\times\frac{3}{7}$ ↝ $\frac{6}{14}$

$k\times\frac{2}{2-k}$ ↝ $\frac{2k}{2k-k^2}$

Pour éviter ces erreurs, faire apparaître le dénominateur 1 :

$2\times\frac{3}{7}=\frac{2}{\mathbf{1}}\times\frac{3}{7}=\frac{6}{7}$ $\qquad$ $k\times\frac{2}{2-k}=\frac{k}{\mathbf{1}}\times\frac{2}{2-k}=\frac{2k}{2-k}$

Un diviseur ne se distribue pas sur un produit.

Sauriez-vous dire ce qu'on doit mettre à la place du « 2 » entouré, qui est erroné ?

$\frac{(x-1)(x+1)}{2}$ ↝ $\frac{x-1}{2}\times\frac{x+1}{(2)}$

Similitude

Les règles de transformation des quotient peuvent évoquer celles concernant les équations. Mais dans une équation, justement, on peut ajouter un même nombre aux deux membres, cela produit une équation **équivalente**.

(Des affirmations P et Q sont dites *équivalentes* lorsqu'elle reviennent au même : Lorsque P est vraie, Q est vraie ; et lorsque P est fausse, Q est fausse.)

Des ressemblances entre deux théorèmes, deux « règles » d'algèbre, engendrent souvent des erreurs qu'on peut appeler erreurs de similitude. C'est pourquoi, lorsqu'une règle, un théorème, une transformation, vous évoque autre chose (« ah oui, ça ressemble… à quoi, déjà ? »), il vaut mieux vous creuser la tête afin de bien chercher à identifier les deux éléments du mélange et remettre chacun à sa place. Parfois, l'intervention d'un interlocuteur est nécessaire.

Parenthèses implicites

Le trait de fraction joue un rôle de parenthèses :

$\frac{a-b}{c-d}$ signifie $\frac{(a-b)}{(c-d)}$.

Le dédain à l'égard de ces parenthèses implicites est source d'une erreur fréquente en seconde :

$\frac{1}{a}-\frac{1-a}{a}$ ↝ $\frac{1-1-a}{a}=\frac{-a}{a}=-1$

Alors qu'en explicitant dès le début les parenthèses, l'erreur peut être évitée : $\frac{1}{a}-\frac{(1-a)}{a}=\frac{1-(1-a)}{a}=\frac{1-1+a}{a}=\frac{a}{a}=1$.

Ambiguïté

Il faut veiller à ce que la taille et la position du trait de fraction indiquent clairement ce que l'on veut exprimer.

- $\frac{a}{b}+c$ pourrait signifier aussi bien $\frac{a}{b}+c$ que $\frac{a+c}{b}$
- $\frac{\frac{a}{b}}{c}$ pourrait signifier $\frac{\frac{a}{b}}{c}$ ou bien $\frac{a}{\frac{b}{c}}$

Le trait de fraction principal doit se situer au niveau de la ligne d'écriture.

Diviser par 0

La division est définie comme opération inverse de la multiplication : lorsqu'on multiplie le diviseur par le quotient, on doit retrouver le dividende.

2	0
	q

Par conséquent, si $\frac{2}{0}$ était égal à un quotient q, il faudrait que $q\times 0=2$, ce qui n'est pas possible. Donc $\frac{2}{0}$ n'existe pas.

Quand au cas de $\frac{0}{0}$, on tombe sur le problème inverse : tous les quotients pourraient convenir. Ne sachant lequel choisir, on n'en admet aucun.

Donc « $\frac{a}{0}$ » n'a jamais de sens : on ne peut pas diviser par zéro.

Dans ce chapitre de révisions, pour ne pas alourdir le texte, lorsqu'un dénominateur est écrit, il est implicitement supposé non-nul. Rigoureusement, il faudrait le préciser à chaque fois.

On ne peut pas diviser par zéro, mais on peut diviser zéro :

$$\frac{0}{2}=0.$$

D'ailleurs, un quotient ne s'annule que si son numérateur s'annule. Disons-le d'un style plus mathématique : un quotient s'annule si, et seulement si son numérateur s'annule :

$$\frac{a}{b}=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=0$$

Alors qu'un produit s'annule si, et seulement si l'un de ses facteurs s'annule :

$$ab=0 \quad \Leftrightarrow \quad (a=0 \quad \text{ou} \quad b=0)$$

Deux remarques de logique mathématique au passage :

L'équivalence logique

Le signe « $\Leftrightarrow$ » se lit « équivaut à ». Il se met entre deux affirmations mathématiques, pour dire qu'elles sont « équivalentes », c'est-à-dire qu'elles sont vraies en même temps et fausses en même temps. Il a le même sens qu'un « si, et seulement si ».

Le « ou » mathématique.

Le « ou » de la langue courrante est plutôt un ou *exclusif*. C'est-à-dire un « ou » dans lequel chaque possibilité offerte *exclue* l'autre. Ainsi, dans la phrase : « Il faut choisir : tu entres ou tu sors ! ». On imagine mal que le locuteur envisage d'offrir à son interlocuteur la possibilité de sortir et d'entrer à la fois : au contraire, il manifeste que si c'est l'un, c'est pas l'autre.

Le « ou » mathématique, en revanche, est **par défaut** un ou *inclusif*, c'est-à-dire un « ou » qui inclus le « et ». C'est un « *ou ou et* ». L'affirmation « $a=0$ ou $b=0$ » est donc (encore) considérée comme vraie, même lorsque les variables a et b s'annulent toutes les deux.

XI- La racine

Racine carrée

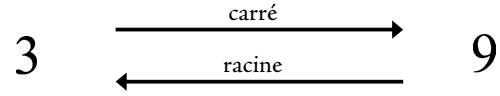
Dans ce paragraphe, *racine* signifiera **par défaut** *racine carrée*, c'est-à-dire en fait racine *du* carré : ce qu'il y avait au début, à la racine, avant qu'on élevât au carré.

Définition

La **racine** d'un nombre A est le nombre positif dont le carré est égal à A.

Exemple

3 est la racine de 9, car 9 est le carré de 3.



Théorème

Tout réel positif admet une unique racine

Exemple

Même la racine de 2 a elle-même une racine, qu'on peut appeler « racine de racine de 2 » (et qui a elle-même une racine…).

Commentaire

Le nombres strictement négatifs n'ont pas de racines parmi les nombres réels, parce que le carré d'un réel ne saurait être négatif.

Démonstration

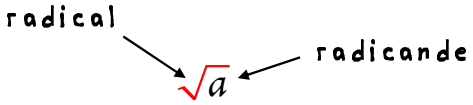
Existence

Il est difficile de démontrer l'existence de la racine de tout nombre positif. L'existence de la racine de 2, par exemple, ne va pas de soi.
Cette existence des racines est admise au lycée. Il faudrait, pour la démontrer, utiliser le *théorème des valeurs intermédiaires*, qui est à peine abordé en terminale. (L'idée, c'est que, lorsqu'on fait varier continûment x de 1 à 2, son carré, x^2, varie continûment de 1 à 4. Ce carré doit donc bien atteindre la valeur intermédiaire 2. Il faut donc bien qu'il existe un réel dont le carré est 2.)

Unicité

Supposons qu'un nombre ait deux racines, que nous noterons r et r'.
Alors $r^2 = r'^2$
donc $r^2 - r'^2 = 0$
donc $(r-r')(r+r') = 0$
donc $r = r'$ ou $r = -r'$
Mais comme r et r' sont de même signe, $r = r'$. Les deux racines n'en font donc qu'une.

Notation



La définition de la racine s'écrit alors : $A = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 = B \\ A \geq 0 \end{cases}$

Rappel

Le signe $\Leftrightarrow$ se lit « est équivalent à ».

Ambiguïté

Le trait supérieur du *radical* joue un rôle de parenthèses. Il était d'ailleurs utilisé en ce sens par certains mathématiciens, avant que les parenthèses ne s'imposassent. Ainsi : $2 \times \overline{2+1}$ signifiait $2 \times (2+1)$.

Il faut donc veiller à ce que ce trait supérieur couvre exactement le terme dont on veut prendre la racine et éviter une écriture ambiguë comme : ~~$\sqrt{4+}$~~ $\sqrt{4+5}$, donc on ne sait si elle signifie $\sqrt{4}+5$, c'est-à-dire 7, ou bien $\sqrt{4+5}$, c'est-à-dire 3.
Parfois, on termine ce trait en redescendant, de façon à bien marquer l'endroit où il s'arrête : $\sqrt{a+b}+c$

Distribution

Le radical se distribue sur les produits (et les quotients).
La racine du produit égale le produit des racines.
Soient a et b deux réels positifs :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$
$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (\text{si } b \neq 0)$$

Mais en général : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Démonstration

(Cas du produit)
Soient a et b deux réels positifs.
On pose $V = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (c'est-à-dire $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$)
Alors $V^2 = \left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right) = \sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{b} = \underline{ab}$
V est un nombre positif dont le carré est ab, donc $V = \sqrt{ab}$.

Application

La distribution du radical sur les produits permet de « sortir les carrés » qui sont « cachés » dans le radicande :

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Puissance 1/2

Les radicaux se distribuent sur les produits, or il a été dit, au paragraphe sur les puissance que se distribuer sur les produits était l'**apanage** des exposants. Serait-ce qu'un radical est un exposant ? Eh bien oui, les mathématiciens ont eu beaucoup de bonnes raisons de considérer que prendre la racine, revenait à élever à la puissance $\frac{1}{2}$: $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

Irrationalité

Certaines racines sont « incalculables ». Elles ne peuvent s'écrire sans radical, à commencer par $\sqrt{2}$. Plus précisément, $\sqrt{2}$ ne peut s'écrire sous forme de fraction : c'est ce qu'on appelle un nombre **irrationnel**. Les nombres **rationnels** étant, au contraire, ceux qui s'écrivent sous forme de fraction.

Les nombres irrationnels ont une écriture décimale infinie et non **périodique**. Une écriture décimale est dite *périodique*, lorsqu'à partir d'un certain endroit, elle se répète indéfiniment. Exemple : $12,48181818\overline{181}...$

Tous les nombres que l'on peut exprimer avec les dix chiffres, les opérations usuelles et même la virgule, peuvent se mettre sous forme de fraction. Puisque $\sqrt{2}$ ne peut être mise sous forme de fraction, il était nécessaire, pour l'exprimer, d'inventer une nouvelle notation.

Erreur « épistémologique »

La valeur que donne la calculatrice lorsqu'on lui demande la racine de deux n'est pas une valeur exacte, mais une *valeur approchée*. Et il n'est pas question, en mathématiques, de travailler avec une valeur approchée comme si c'était une valeur exacte, ce serait commettre une erreur portant sur la nature même des mathématiques, erreur qu'à défaut d'autre terme disponible on pourrait appeler « erreur **épistémologique** ».

Si l'on utilise la calculatrice (dans le mode de calcul décimal usuel) pour obtenir l'égalité suivante : $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$, alors on commet une telle erreur, bien qu'on écrive une égalité vraie. Car la calculatrice aura obtenu le résultat en travaillant avec des valeurs approchées. Elle calcule une ou deux décimales de plus que son écran ne peut en afficher et fait un arrondi, donc elle affiche finalement 2, mais en tant que valeur approchée.

Le « = » mathématique signifie « exactement égal ». Donc les affirmations : « $\pi = 3,14$ » et « $\frac{7}{3}=2,33$ » sont <u>fausses</u>.

Une autre « erreur épistémologique » consiste à mesurer sur un dessin, pour obtenir une longueur ou un angle. Si vous ne comprenez pas pourquoi cet acte de mesurer n'a aucun sens en mathématiques, il vaut mieux poser la question.

S'il fallait **hiérarchiser**, on pourrait dire que les « erreurs épistémologiques » sont les plus graves, puisqu'elles mettent en évidence une incompréhension de ce que sont les mathématiques.

Théorème

Lorsque n est un entier naturel,
$\sqrt{n}$ est soit un entier soit un irrationnel.

Exemples

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ sont des nombres irrationnels.

Démonstration

Le cas général demande quelques théorèmes d'arithmétique qui ne sont pas abordés en seconde, mais nous pourrons du moins démontrer en classe l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Racine d'une somme

La racine de la somme n'est pas la somme des racines.

Il est parfois tentant de distribuer un radical sur une somme, par exemple dans l'expression : $\sqrt{a^2+b^2}$

Si une telle distribution était possible, on pourrait simplifier singulièrement le théorème de Pythagore, en enlevant les carrés de son égalité…

Un **contre-exemple** ne suffira sans doute pas à éliminer « radicalement » cette erreur, mais en voici un quand même :

$$\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$
$$\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$$

Forme « normalisée »

Autant que possible, une expression numérique est à mettre par ordre de priorité sous la forme :

	Exemples :
• D'un entier	5
• D'une fraction irréductible	$\frac{2}{3}$
• $n\sqrt{p}$, où n et p sont des entiers et où p le plus petit possible. (Autrement dit, il faut « sortir les carrés éventuellement cachés dans les radicandes ».)	$3\sqrt{2}$
• $\frac{n}{d}\sqrt{p}$, où $\frac{n}{d}$ est une fraction irréductible et p un entier le plus petit possible (ou éventuellement $\frac{\sqrt{p}}{d}$, ni n vaut 1).	$\frac{2}{3}\sqrt{5}$
• D'une somme d'expressions des formes précédentes.	$2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$

En résumé, on sort un maximum de choses du radical.

Exemple simple

On ne laisse pas $\sqrt{1}$ à la fin d'un calcul. Il faut aller jusqu'au bout et écrire 1.

Somme de racines

Une expression comme $2\sqrt{5}+3\sqrt{2}$ peut être vue comme une somme de monôme d'unités irrationnelles différentes. Elle est irréductible.

Mais contrairement à ce qui se passe avec les unités littérales, il est parfois possible de « convertir » les monômes dans une unité commune (et contrairement au cas des fractions, ce n'est pas toujours possible).

Il faut pour cela, en utilisant la distribution du radical sur les produits, « sortir les carrés » qui seraient « cachés » dans le radicande. Ainsi, certaines sommes deviennent réductibles :

$$\sqrt{8}+\sqrt{18}=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$

Les radicaux au dénominateur

Que ce soit dans une expression numérique ou algébrique, il est important de se débarrasser des radicaux au dénominateur car cela permet souvent de remarquer des simplifications qui seraient passées inaperçues autrement. Il est toujours possible d'éliminer les radicaux au dénominateur :

Lorsque le dénominateur est lui-même une racine, il suffit de multiplier « en haut et en bas » par cette racine :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Si le dénominateur est une somme contenant une racine (ou plusieurs), on peut multiplier cette somme par sa **quantité conjuguée**. La quantité conjuguée de « ✷+⬟ » est tout bêtement « ✷ − ⬟ ». Exemple :

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1\times\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\times\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\frac{\sqrt{2}-1}{1}=\sqrt{2}-1$$

Racine d'une fraction

Lorsqu'il y a une racine de fraction, on peut toujours s'arranger pour n'avoir plus qu'une racine d'entier dans l'expression : on distribue le radical sur le quotient et l'on se ramène ainsi au cas du paragraphe précédent :

$$\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$$

Racine cubique

La racine cubique de a est le réel dont le cube est égal à a

On le note $\sqrt[3]{a}$.

On a par exemple : $\sqrt[3]{8}=2$.

XII- Les puissances

Définition

Quels que soient le réel a et l'entier naturel n non-nul :

Puissance d'exposant positif : $a^n=\underbrace{aa...a}_{n \text{ facteurs}}$

$a^1=a$

Puissance d'exposant négatif : $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ (lorsque $a\neq0$)

Puissance d'exposant nul : $a^0=1$ (lorsque $a\neq0$)

0^0 n'est pas défini.

Dans « a^n », n est l'**exposant** et a n'a pas de nom (on pourrait l'appeler la « *base* »). L'opération en elle-même s'appelle l'**exponentiation**. Le résultat est la **puissance**.

Commentaire

L'identité « $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ », qui sert à définir les puissances d'exposant négatif, peut se dire : « Lorsqu'on change l'exposant en son *opposé*, la puissance (c'est-à-dire le résultat) est changée en son *inverse*. »

Lecture

a^2 peut se lire « a puissance deux » , « a deux » ou « a au carré ».

On n'écrit jamais le coefficient derrière la variable, comme dans « $a2$ », car la lecture orale « a deux » serait alors ambiguë : on ne saurait si le « deux » est un exposant ou un facteur. Placé après la variable, c'est toujours un exposant.

Recommandation

Sans que ce soit toujours conscient, l'habitude est prise, en mathématiques (et il est fortement recommandé de la suivre), de lire :

a^2+b^2 : « a **deux** plus b **deux** »

$(a+b)^2$: « a plus b … **au carré** ».

«Au carré » connote l'élévation du tout au carré, alors que « deux », qui ne prend qu'une syllabe, donnera plutôt l'impression de ne concerner que le dernier terme.

Exposant/Indice

L'exposant, écrit en petit en haut à droite, n'a pas le même rôle qu'un **indice**, écrit en petit en bas à droite. L'indice n'a rien à voir avec les puissances. L'indice est un numéro. La notation indicielle permet de disposer simplement d'une infinité de lettres, pour désigner une infinité d'objets mathématiques : « a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4 ; a_5 ; a_6 ; … »
L'indice peut être lui-même une lettre ou une expression :
« a_n », « a_{n+1} ».

Produit de puissances d'un même nombre

$$a^n \times a^p = a^{n+p}$$

On peut réduire un produit de puissances d'un même nombre. Alors les exposants s'additionnent.

Commentaires

Lorsque les exposants sont positifs, cette identité se comprend aisément si l'on passe par l'écriture en « **poly-produit** » :

$$a^2a^3 = (aa)(aaa) = aaaaa = a^5$$

(On appellera ici « poly-produit » les produits de plusieurs termes, notamment de plus de deux termes.)
Si l'on écrit l'égalité dans l'autre sens, on peut l'interpréter en disant que la « base » transforme les sommes en produits. C'est d'ailleurs une **propriété caractéristique** des puissances que d'opérer ce lien entre l'addition et la multiplication $a^{2+3} = a^2 \times a^3$
Une propriété caractéristique est une propriété qui n'appartient qu'à l'objet en question, de sorte qu'elle aurait pu servir de définition. Par exemple, le fait, pour un quadrilatère, d'avoir des diagonales qui se coupent en leurs milieux, **caractérise** le parallélogramme : parmi les quadrilatères, tout parallélogramme a ses diagonales qui se coupent en leur milieux, et seuls les parallélogrammes vérifient cette propriété.

Quotient de puissances d'un même nombre

$$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$$

On peut réduire un quotient de deux puissances d'un même nombre. Alors on soustrait les exposants (celui du numérateur moins celui du dénominateur).

Cette formule reste valable lorsque les exposants sont négatifs :

$$\frac{a^{+2}}{a^{-3}} = a^{(+2)-(-3)} = a^{2+3} = a^5$$

En posant $n=0$, on retrouve la définition des puissances d'exposant négatif (puisque $a^0 = 1$) : $\frac{1}{a^p} = a^{-p}$

Somme de puissances d'un même nombre

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe sur les polynômes, la somme $x^2 + x^3$, qui est une somme de deux monômes d'unités différentes, est irréductible.
En revanche $x^3 + x^3 = 1x^3 + 1x^3 = 2x^3$

Priorité

Par convention, l'exposant est prioritaire sur tous les autres opérateurs, il ne concerne donc que le terme qui le précède :
$-a^2$ signifie $-aa$ et non $(-a)(-a)$.
$2a^3$ signifie $2aaa$ et non $(2a)(2a)(2a)$
$-2(x-1)^2$ signifie $-2(x-1)(x-1)$

Distribution

Les exposants se distribuent sur les produits, mais pas sur les sommes :

$(ab)^n = a^n b^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ Mais en général : $(a+b)^n \neq a^n + b^n$

Avant d'apprendre une « règle d'algèbre », il faut la saisir intuitivement. Une identité bien comprise est d'ailleurs déjà apprise. Ici, en prenant une valeur simple de *n*, la démonstration est si courte et si sensible qu'elle est plus facile à retenir que le théorème :

$$(ab)^3 = (ab)(ab)(ab) = ababab = aaabbb = a^3 b^3$$

En mathématiques, si l'on a juste compris « comment faire », on n'a rien compris. Il faut toujours connaître le « pourquoi du comment ».

Commentaire

Le fait de se distribuer sur les produits est une propriété qui *caractérise* les exposants. Lorsqu'un opérateur se distribue sur un produit, c'est que c'est un exposant.
Si les exposants se distribuaient sur les sommes, les identités remarquables n'auraient rien de particulièrement remarquables, on aurait par exemple : $(a+b)^2 \rightsquigarrow a^2 + b^2$.

Ambiguïté

Il faut éviter des écritures ambiguës comme : $\frac{a}{b}^n$, car on ne sait pas si l'exposant *n* porte sur le numérateur : $\frac{a^n}{b}$; ou s'il porte sur tout le quotient : $\left(\frac{a}{b}\right)^n$.

Puissance d'une puissance

$\left(a^n\right)^p = a^{n \times p}$

Lorsque les exposants sont positifs, l'écriture en « poly-produit » rend cette identité limpide :

$$\left(a^2\right)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a^6$$

Récapitulatif

$a^n \times a^p = a^{n+p}$ $\frac{1}{a^p} = a^{-p}$ $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

$(ab)^n = a^n b^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\left(a^n\right)^p = a^{n \times p}$

XIII- La valeur absolue

Absolu/relatif

Un nombre relatif se décompose en deux éléments : son **signe** et sa **valeur absolue** :

signe	valeur absolue
–	5
+	3

Absolu s'oppose à *relatif*. Les nombres inventés d'abord, qu'on pourrait dire « naturels » (même si l'on ne trouve pas de nombres en tant que tels dans la nature), ont une valeur en soi, sans référence à un autre nombre. Mais les nombres relatifs sont placés relativement au nombre *zéro*. « –5 », c'est 5 unités au dessous de zéro. Un nombre relatif est formé à partir d'un nombre naturel, auquel on adjoint un signe, pour indiquer dans quel sens on s'est déplacé à partir de zéro.

Définition informelle

La valeur absolue, c'est le nombre « sans son signe ».

Opérateur

On peut considérer « valeur absolue » comme un opérateur qui « arrache » son signe à un nombre relatif.

Notation

La valeur absolue de a se note : $|a|$. On lit : « valeur absolue de a ». On peut ainsi écrire : $|-5|=5$

$|+5|=5$

Identification

Mais, puisque les nombres positifs sont *identifiés* aux nombres « naturels » (on confond 1 et +1), on peut dire aussi que l'opérateur valeur absolue « positive » un nombre : $|-5|=+5$

$|+5|=+5$

De ce point de vue, l'opérateur *valeur absolue* laisse comme ils sont les nombres positifs, mais prend l'opposé des négatifs, afin de les « positiver ».

C'est pourquoi, la définition donnée dans les livres de mathématiques est souvent :

Définition officielle

Soit a un réel. Si $a \geq 0$, $|a|=a$

Si $a<0$, $|a|=-a$

opposé de

(Si a est positif, on n'y touche pas. S'il est négatif, on en prend l'opposé, de façon à le rendre positif.)

Remarque

$-a$ n'est pas forcément un nombre négatif. « $-a$ » signifie l'opposé de a. Si a est négatif, c'est-à-dire si la lettre a « contient un signe moins », l'opposé de a est alors positif.

XIV- Glossaire

concision

Concis : exprimé en peu de mots. Un synonyme : laconique.
En latin, *considere* signifie « couper en morceaux » (origine commune avec « inciser »).

occurrence

Circonstance, apparition (d'un mot, d'un phénomène astronomique).
En l'occurrence : en la circonstance.
Le mot occurrence peut signifier, pour un mot, son apparition dans un texte.

glossaire

Lexique.
Glossa (latin) désigne un terme rare, peu usité, qui a besoin d'une explication. Une glose est originellement une explication d'un mot difficile, en marge d'un texte. Un glossaire est un petit dictionnaire, un lexique, qui se concentre sur les mots rares.

déréliction

Etat d'abandon, de solitude morale complète.
Par exemple, sentiment du croyant qui se sent abandonné de Dieu.

ad hoc

Approprié. C'est une locution latine qui signifie littéralement « à cet effet ». Elle a pour synonyme *idoine*.

implicite

C'est le contraire de explicite. Ce qui est explicite est ce qui est formulé, exprimé, manifeste. Ce qui est non dit, entre les lignes, tacite, latent, est dit implicite. Les mathématiques sont théoriquement le royaume de l'explicite : il faut tout dire (mais dans la pratique, il y reste toujours un peu d'implicite dans un texte mathématique).
La *foi implicite* est la confiance absolue qu'on accorde à un dogme sans chercher à le comprendre.

ressortit à

est relatif à, dépend de la compétence de.
Il y a deux verbes *ressortir* :
Celui qui signifie « sortir peu après être entré » : il ressort, ils ressortent de la maison.

Et « ressortir à » qui signifie « être relatif à », « être du ressort de » qui ne se conjugue pas se la même façon : la langue orale ressortit à l'ethnologie.

connote

Evoque.
Connoter vient du latin. *Cum notare* : noter avec. Une connotation est une signification seconde qui s'ajoute à la signification principale.

droit canon

Droit de l'Eglise.
Les canons de l'Eglise, sont les règles, les décrets de conciles en matière de foi et de discipline. Du latin *canon*, règle, modèle (lui-même du grec *kanôn*). Rien à voir avec l'arme, le canon, qui est de la même origine que canne.

abus de langage

Voici des exemples d'abus de langage, qui vaudront mieux qu'une longue définition :
« Soit *M* un point ». On devrait dire, « Soit *M* une lettre qui *désigne* un point. »
« Je vais boire une tasse de thé », pour dire : « je vais boire le *contenu* d'une tasse thé ».

synecdoque

Figure de style consistant à prendre la partie pour le tout (ou le tout pour la partie), cas particulier de la métonymie.
(La terminologie des figures de style varie d'un auteur à l'autre. Ici, on a fait simple.)
Exemple : dire « un toit » pour signifier « une maison ».

par défaut

A défaut de précisions. C'est un terme qui vient de l'informatique : les réglages *par défauts* sont les réglages à la sortie d'usine, qu'on peut toujours modifier par la suite.

apanage

Exclusivité.
L'apanage était, dans le régime féodal, une portion de territoire accordée à un prince en compensation de son exclusion du pouvoir.
« Apaner », c'était donner son pain, sa part, à quelqu'un.

épistémologique

Relatif à l'étude des sciences.
epistêmê, en grec, c'est la science.

hiérarchiser Ordonner, classer.
Du grec *hieros* « sacré », comme dans hiéroglyphe ; et *arkhê* « commandement », comme dans anarchie, oligarchie, monarque.